論文

黄金比に関する一考察*
—"divina proportione"の名称をめぐって—

平野 葉一**

Remark on the notion of Golden Ratio
— concerning "Divine Proportion" in the Renaissance period —

Yoichi HIRANO

The Golden Ratio might be one of the most fecund notions in the history of mathematics. In fact, we could find various aspects concerning this notion in historical steps of human activities; in the development of mathematics, especially geometry, in human cultural activities (for example the fine art of the Renaissance period), and even in the human efforts to explain some principle seen in the nature. These various factors might give us lots of topics, which are interesting and even mystic.

Actually, so many books and articles are published, to report and discuss diverse aspects of the Golden Ratio, on the one hand. Much of them should be written with the quite precise and steadfast intention of discussing various factors related to this notion as mentioned above. But, on the other hand, there is no denying that many topics can be taken up without full context but separately and fragmentarily. From a historical viewpoint, the notion of Golden Ratio should be deeply related to human thoughts and activities for the objects in the world.

In this paper, we try to show diverse aspects of the Golden Ratio seen in its historical development, to suggest that this notion should be discussed in wider and deeper context. And especially, we try to point out the fact that this notion was called "divine proportion" in the Renaissance period and that this name (term) would be derived from Leonardo da Vinci's "*Paragone*" of his book "*Libro di Pittura*" (on Painting) .This fact is considered to be an aspect in which mathematical notions and human activities have a close relation to each other.

---

*本稿は、2011年5月に中国、上海で開催された第4回数学史・数学教育国際会議 (The Fourth National Conference on History and Pedagogy of Mathematics) における口頭発表

Y. Hirano: "Remark on the notion of Golden Ratio— concerning "Divine Proportion" in the Renaissance period —"

が基礎となっている。ただし、この発表では数学教育における数学史の応用が主題であったが、本稿は思想史的視点からその内容に対して詳細を加え、再度整理したものである。

**東海大学文学部ヨーロッパ文明学科

§１．はじめに

数学概念にはその性質がゆえに人間の諸活動において特別な意味をもって扱われるものがある。たとえば、円はどの方向に対しても一様であるがゆえに完全性を備えた神性の象徴とも捉えられ、かつては天体運動モデルとして用いられた。そうした数学概念の一つに「黄金比」がある。「黄金比」はそれ自体が数学概念として議論されると同時に、人間の諸活動の歴史においてさまざまな形で登場してきた。この比は数学概念として幾何学的性質やそこから派生する数や量の関係性の展開を促し、芸術においては絵画や彫刻、建築に表現される“調和”や“美”との関連のなかで論じられてきた。また、人為を超える自然界において見出されるさまざまな規則性の把握にも用いられてきた。それだけに、この比は数学的論理性に支えられながら人間の理性の要求を満たすと同時に、人間の感性と結びつくある種の価値に関わる欲求にも応えてきたということができる。この比は現在もなお種々の問題を提起するが、それ以上に、今日ではこの比をめぐる検討の歴史経緯のなかで繰り広げられてきた広範な議論がさまざまな形で紹介されている。そのなかには高度に専門性を備えた数学的あるいは哲学的議論もあれば、この比を“神秘の象徴”と捉えることで多くの人々の好奇心を増長させる断片的な記述も見出される。

それでは「黄金比」は人間にとっていかなる意味をもっていたのであろうか。本稿が検討するのはまさにその点にある。「黄金比」は、さまざまな時代や地域においてそれぞれの名称で呼ばれ、それぞれ特有の意味をもって扱われてきた。一つの概念が時間や空間を超えて連綿と扱われてきたことは、その概念が文化や文明―人間精神の根底に存する価値意識やそこから生じる人間営為そのもの―に深く関わってきたことを想起させる。本稿ではこうした問題に対し、とくにこの比に対して人間が感じてきたであろう調和や神秘性に着目する。その上で、次の二つの問題のそれぞれについて検討することを目指す。

第一は「黄金比」の捉え方に関わる。数学概念であるこの比は、芸術などといった人間の創造的営為に影響を及ぼす。また、人間営為を超えた自然把握にも用いられる。したがって、「黄金比」が数学概念、創造的人間営為、自然把握といったそれぞれの場面で登場してきたことには、この比に何らかの意味を見出そうとしてきた人間の意図を感じざるを得ない。ここでは、こうした問題に焦点を当て、その根底にある調和や神秘性について検討する。

第二は「黄金比」の名称の問題である。この問題は今日においても必ずしも議論が尽くされているわけではない。この比が古代ギリシアにおいて「外中比」と呼ばれていたことは今日まで伝えられるユークリッド『原論』の定義から知られている。また、この比が「黄金比」なる名称で呼ばれるようになるのが漸く 19 世紀になってからのことであるという事実も、当時の数学書の記述から見て取ることができる。それでは、この比がルネサンス期において“divina proportione”（神聖なる比、神聖比例）と呼ばれていたことはどうであろうか。ルカ・パチョーリが 1498 年に『神聖比例論』（*Divina Proprtione*）と題する書を著したことは今日では周知のことであるから、当時はこの名称がある程度は知られていたと考えるのが妥当で

ある。しかし、この名称が登場する経緯に関しては必ずしも明らかではないと思われる。本稿ではこの問題を取り上げ、“divina proportione”（以下、「神聖比」と記述する）なる名称がルネサンス期のレオナルド・ダ・ヴィンチに端を発するのではないかという一つの問題提起を行う。

これら二つの論点に対し、本稿では、まず本節に続く第2節で「黄金比」の捉え方として三つの視点を設定する。そして第3節では、これら三つの視点に対する具体例を見ることで、歴史的にもこの比が単に数学的な概念に留まるのではなく、ある種の“調和”や“美”、延いては“神秘性”に関わる概念として考えられてきたことを示す。次いで、第4節では、「黄金比」の名称に関する歴史経緯を簡単に振り返ることで、ルネサンス期における「神聖比例」なる名称に関する議論の背景について述べる。そして、第5節において、ルカ・パチョーリの『神聖比例論』を中心とする著作、それに関連するピエロ・デラ・フランチェスカの著作、さらにはレオナルド・ダ・ヴィンチの『絵画論』の「パラゴーネ」の記述を比較検討しながら、「神聖比例」なる名称がレオナルドに端を発することの推察、検証を試みる。これらの検討をとおし、今日「黄金比」として知られる概念に対する人間意識の一端を明らかにしたい。

§2．「黄金比」を捉える三つの視点

次ページの【表1】は「黄金比」に関わる小史である。ただし、「黄金比」の歴史全体を示すものではない。その歴史の全体像を表すには、その主要なものだけを挙げてもおそらくはかなりのページ数を要することになる。むしろ、ここでは本稿の議論に関連する歴史事項だけを示すに留めている。

この表から、「黄金比」が歴史上さまざまな視点から捉えられてきたことが見てとれる。「黄金比」はそれ自体が数学概念の一つであるから、歴史をとおしてその数学的諸性質に関するさまざまな議論がなされることは当然である。しかし、後から述べるように、ピタゴラス学派によるとされる正五角形の研究以来、この比が特別な意味をもって捉えられていたことが推察される。それは、正五角形の一辺と対角線がなす比として求められるこの比が、他方では通約不能性（incommensurability）―すなわち整数の比として表されない無理数性―の発露となったといわれることにも由来する。これはある種の調和概念あるいは神秘性をもたらす。やがて13世紀に登場したフィボナッチの問題は、17世紀を経て数式や無限概念などの数学的な諸概念の準備が整うと、黄金比との関わりのなかでさまざまな検討の材料を提供する。一方、芸術の分野でもこの比が用いられたことが見られる。たとえば古代ギリシア以来の人体のプロポーションに関わる問題は、それ自体が今日的解釈によるconjectureの域を出ないという指摘もあるが、神々や創造主によって創造された人体がもつ調和にこの比が用いられたことが推察される。さらに、この人体比に対する調和や美の意識はルネサンス期の芸術家にも伝えられていく。一方、数学の諸概念が十分に準備される19世紀以降おいては、「黄金比」は自然の把握にも大きく影響を見せる。人為によらない自然の姿、形に現れる規則性

B.C. 6C.-5C.	- ピタゴラス学派による正五角形(およびペンタグラム)に関する研究および"通約不能性"(無理数概念)の発見[1]
	- ポリュクレイトス(Polykleitos)による"人体比のカノン"(規範)[2]の導入
c. B.C. 300	- ユークリッド(Euclid)『原論』における"外中比"の定義の導入
B.C. 1C.-1C. A.D.	- ウィトルウィウス(Vitruvius)『建築十書』[3]における人体比の導入
1202	- フィボナッチ(Fibonacci;ピサのレオナルド)、『算盤の書』[4]における"フィボナッチ数列"に関する問題提起
c. 1482	- ピエロ・デッラ・フランチェスカ(Piero della Francesca)、『五つの正多面体について』[5](手写本)
c. 1490	- レオナルド・ダ・ヴィンチ(Leonardo da Vinci)「ウィトルウィウス的人体象」のデッサン
	- レオナルド・ダ・ヴィンチ『絵画の書』[6](死後編集)に関わる草稿
1498	- ルカ・パチョーリ(Luca Pacioli)『神聖比例論』[7](手写本)の完成
1525	- アルブレヒト・デューラー(Albrecht Dürer)『測定法教則』[8]、対数螺旋に関する研究
1638	- ルネ・デカルト(René Descartes)、対数螺旋の研究(等角螺旋と呼ぶ)
1753	- ロバート・シムソン(Robert Simson) によるフィボナッチ数の隣接2項比と黄金比(φ)の関係に関する研究
1835	- マルティン・オーム(Martin Ohm)、『純粋初等数学』[9]における"黄金"分割なる名称の最初の導入
1830s	- A.ブラウン(Alexander Braun)、A.ブラヴェ(Auguste Bravais) およびL.ブラヴェ(Louis Bravais) による生物界におけるフィボナッチ数の存在に関する研究(ヒマワリの種、松かさ、葉序など)
1843	- J. P. M.ビネ(J. P. M. Binet) によるフィボナッチ数列の一般項の定式化(黄金比(φ)を用いた定式化)
1914	- トーマス・クック(Thomas Cook)、『生命の曲線』[10]における生物界に存在する対数螺旋(オウムガイを含む)の議論
1942	- ダーシー・トムソン(D'Arcy Thompson)、『生物の形』[11]における生物界における黄金比やフィボナッチ数の存在に関する議論

【表1】「黄金比」をめぐる小史

にもこの比が存在するという議論である。こうした人為を超えた調和が「黄金比」に支えられるという議論は、この比の神秘性をさらに推し進めることになるのである。

したがって、「黄金比」は単に数学概念の一つという以上に人間の“調和”や“美”に関わる意識と相俟って捉えられてきたと考えることが可能である。そこには人間がこの比に対して抱いてきたある種の調和および神秘性が感じられる。こうした点をふまえると、「黄金比」を主題とする人間営為の歴史を次の三つの視点から検討する意味が見出される。

(1) 数学における調和と神秘性
(2) 芸術などの文化営為における調和と神秘性
(3) 自然における調和と神秘性

これら三つの視点のそれぞれは、相互に関連し合いながらこの比を人間精神における一つの価値の象徴として捉え直す方向性を与えると思われる。

§3．三つの視点の具体例

本節では、上で述べた「黄金比」に対する三つの視点のそれぞれについて、その関連性も含めて具体例を紹介しておく。

(1) 数学における調和と神秘性

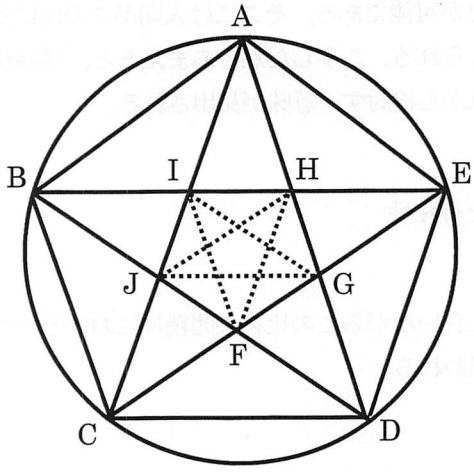
「黄金比」の数学的諸性質の検討という点から考えると、この比に見出される数学的調和、神秘性をもっとも象徴しているのは正五角形であろうと思われる。この最初の研究はピタゴラス学派によると推察されるが、彼らは正五角形の五本の対角線がつくるペンタグラム（五芒星）を自らの紋章にしたことで知られている。正五角形では一辺に対する対角線の比が「黄金比」（$\varphi = 1.6180\cdots$）[12] をなすが、おそらく彼らは以下に述べるような性質に何らかの形で気がついていたと思われる。

【図 1】は正五角形に対角線を引いてペンタグラムを作図したものである。現代的に述べるならば、この図には長さの異なる四種の線分が登場し（たとえば、長さの順にBE>AB>BI>IH）、これらの線分に対しては

$$BE = AB + BI,\quad AB = BI + IH$$

というように、短い方から順に二線分を加えればその次の長さとなる性質が見出される。さらに、長さの順にとった二線分の比はすべて「黄金比」に等しくなる。すなわち、長さの順にとった二線分に対し、長い方の線分からは短い方の線分が一つ分だけ引き去ることができ、その余りは短い方の線分との間に最初の二線分と同様の比例関係をもつことになる。また、ペンタグラムを構成する五本の対角線はその中央に別な小正五角形を結ぶが、この内部に新たにペンタグラムを作図すれば（図の点線）、さらにその内部にまた別の小正五角形がつくら

れる。したがって、この操作は無限回続き、中心に向かって順次小さくなる正五角形の無限列が得られることになる。こうした事実から、「黄金比」は単位である“1”だけを用いた無限連分数展開の形で表されることがわかる（【図2】）。



【図1】

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

【図2】

ところで、「黄金比」は実際には

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180\cdots$$

という無理数である。一見複雑な形の分数で表されるこの比が実際には“1”だけを用いたもっとも単純な無限連分数として表されことは、ピタゴラス学派をはじめ古代の人々にとってこの比が“特別”な調和—それゆえにある種の神秘性—をもつ存在であったことをうかがわせる。それだけに、この比およびこの比をもつ正五角形が特別な意味を付与されていたであろうことも十分に推察されるのである。

他方、以下に述べる内容との関連で、フィボナッチ数についても簡単にふれておく。13世紀初頭にフィボナッチが提起した問題は、後に“フィボナッチ数列”

$$(*_1) \qquad f_1=1, \quad f_2=1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

として(＊1)のように定式化され、広範な議論を呼ぶこととなる。初項から順に表せば

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots\cdots$$

となるが（フィボナッチ数）、これらの各項が数学に限らずさまざまな局面で登場する—とくに「黄金比」との関連で登場する—ことが、多くの研究から知られている。

フィボナッチ数列の隣接二項間の比 f_{n+1}/f_n をとって順次並べてみると次のようになる。

$$(*_2)\quad \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \cdots$$

これらの比を順に計算すれば、その値が段々と「黄金比」(φ) に近づくことがわかる。これが1753年にシムソンによって得られた結果で、すなわち、

$$f_{n+1} \,/\, f_n \to \varphi \quad (n \to \infty)$$

である。また、(*2) によって与えられる分数 (有理数) のそれぞれは別な意味をもつ。上の【図 2】で示した「黄金比」(φ) の無限連分数表示において、無限に続く分母をどこかで切ってそこまでの分数を整理すれば、必ず (*2) のいずれかの分数が得られる。言いかえれば、(*2) で与えられる分数は「黄金比」(φ) の有理数による近似を表すことになり、それは、項が進むほどφの値に近づくことを意味する。

こうした事実をふまえると、フィボナッチ数列はその根底で「黄金比」に支えられていることがわかる。実際、1842年にフランスの数学者ビネ (J. P. M. Binet) はフィボナッチ数列 (*1) の一般項がφを用いて表されることを導いている[13]。

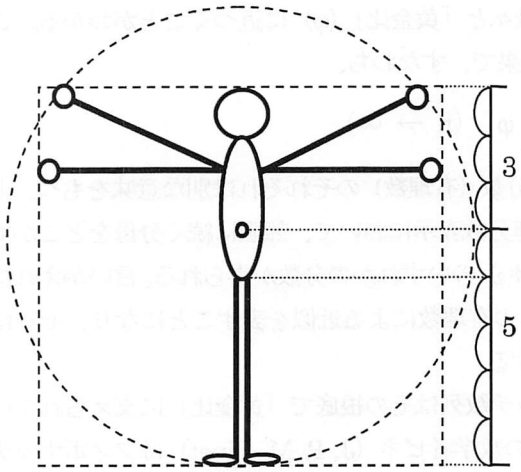
(2) 芸術などの文化営為における調和と神秘性

「黄金比」とフィボナッチ数の関係は、この比が連続量あるいは離散量といったそれぞれの形で議論されることを示している。それは同時に、この比がさまざまな場面で登場してきた理由の一端を明らかにする。実際、前節で述べた第二の視点すなわち芸術などの文化的諸営為においてもこの比は特別な意味をもって登場する。

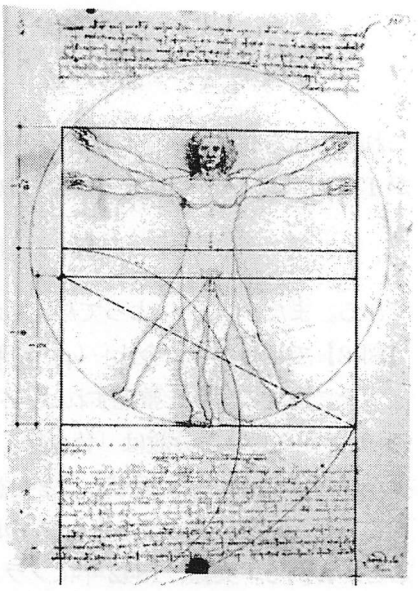
その例として、古代以来「黄金比」が美や調和の象徴として捉えられてきたと推察される点が挙げられる。たとえば、古代ギリシアのポリュクレイトスが与えたとされる“人体比のカノン”(規範) やその後に古代ローマのウィトルウィウス (Marcus Vitruvius Pollio:ca. B.C.1C.-A.D.1C.) が記述している人体比について考えてみる。ウィトルウィウスが示唆するように、身体が身長と両手を広げた長さの正方形に内接し、その四肢が臍を中心とする円周上を動くとする。すると、身体比の基準の一つとして身長に対する臍の位置—臍が身長をどのように分割するか—は理想的な身体構成の基本的要素となり得る。

多少乱暴ではあるが、身体が八頭身で構成されているとしよう。このとき、たとえば一つの理想的モデルとして【図 3】の模式図が表すような身体象が浮かび上がる。すなわち、臍が身長を3 :5に内分する構図である。

もちろん古代から理想的な身体像を刻んできた彫刻のすべてが3 :5という比を備えているという意味ではない。実際、ポリュウクレイトスの彫刻[14]はこれに近い比をもつものの、必ずしも一致するわけではない。また、レオナルドが1490年頃に描いたとされる「ウィトルウィウス的人体像」(【図 4】) についても同様である。しかし、逆に考えるならば、そうし



【図3】



【図4】

た彫刻あるいはデッサンにおいて臍が「黄金比」に近い位置で身長を分割することは、この比が人体の美や調和を表す“何ものか”であったことをうかがわせる。その理由を問うことをせず、一つの仮説として人間が自らの身体の美や調和を“黄金比的”な比率に求めていたと考えてみる。「黄金比」は無理数ではあるが、無理数概念が認識されていない時代においても幾何学的には単位線分からこの比を長さにもつ線分の作図は可能である。しかし、それ以上に、たとえ幾何学的な議論が不十分な時期であっても、上の（＊2）に登場する分数比のいずれかを用いることで「黄金比」に近い比率で身長を分割することは可能であろうと思われる。言いかえるならば、身長を整数比で分割することは十分に可能であり、その際に「黄金比」に代わる比として(＊2) のいずれかの比率—たとえば３：５や５：８などというような比率—が用いられていたと推測することは可能である。この仮説の是非は別としても、実際に表現された理想的な身体の臍の位置として「黄金比」あるいはそれに近い比が用いられていたと推察され得ることには、この比に対する人間の調和の意識やその根底にある神秘性が感じられるのである。

実際、【図４】に示すように、ロウラーは著書『神聖幾何学』において、レオナルドのデッサンにおける臍の位置が身長を黄金比に分割することを幾何学的作図によって説明しようと試みている[15]。

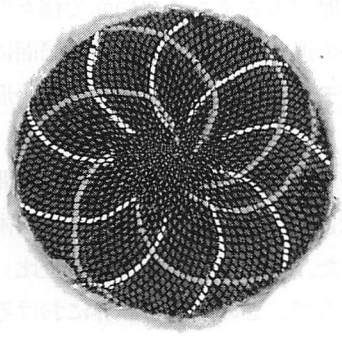
(3) 自然における調和と神秘性

前節で述べた第三の視点—自然における調和と神秘性—においては、「黄金比」の値と同時にその離散的表現も大きく関わってくる。「黄金比」が無理数であるのに対し、(＊2) で与え

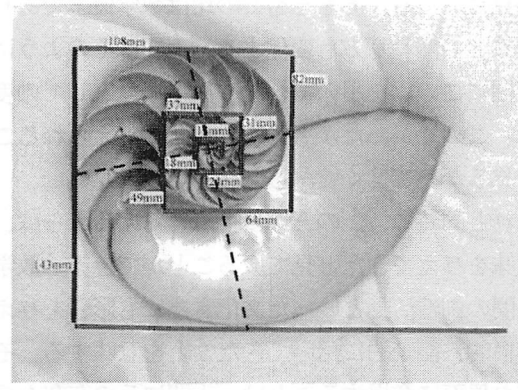
られるフィボナッチ数の隣接二項間の比—すなわち整数比—に注目してみる。整数比は離散的な対象がなす比に対応する。すなわち、個々に数えられる対象が存在し、そのうちの二つの量の間に“黄金比的”関係が成立する際には、それらは隣接するフィボナッチ数として表されるということになる。19 世紀半ば頃から展開する生物の形態に関する研究においてはこうした関係性がよく議論される。そして、それは人間営為を超えた自然のなかにも「黄金比」に基礎づけられる調和が見出されるという点で、この比により一層の神秘性を付与することになる。

【図 5】はヒマワリの中央に見られる種（小花）がつくる螺旋の写真である[16]。この写真からわかるように、ヒマワリの種は時計回り（右回り）と反時計回り（左回り）の二重の螺旋をつくるように見える。その螺旋の本数を数えてみると、【図 5】では反時計回りには 55 本、時計回りには 89 本あり、これらの二つの数はフィボナッチ数列の隣接二項となっていることがわかる。こうした現象はマツカサを枝につく根本から見た場合にも認められ、全体の大きさに対する一枚ずつの鱗片の大きさに応じて、左右の螺旋の本数がたとえば5本と8本、8 本と 13 本というようにフィボナッチ数列の隣接二項となる。また、マーガレットのようにヒマワリと同じ構造をもつ花の中央の種の配列も、大きさに応じて同様な二重螺旋をつくる。

こうした現象の理由を、葉序すなわち葉のつき方から検討する研究もある。植物の花は葉が進化したもので、ヒマワリのような集合花ではもともとの葉のいくつかが上端で集合花を形成したと考えられる。この際、それぞれの葉は太陽光を効率よく受けるため—このように考えられているが—に、すぐ下の葉と重ならないように黄金比的な角度（360 度／φ ＝ 222.49･･･度）を保ちながら上部に向かって一枚ずつ配置されていく。その結果、上部に位置する葉の進化した集合花がつくる螺旋は、「黄金比」—離散的な数としてはフィボナッチ数—に特徴づけられることになる[17]。



【図5】



【図6】

その一方で、生物の形態が「黄金比」に支えられる典型的な例としてしばしば登場するのがオウムガイの外殻に見られる螺旋である。オウムガイの殻を背腹軸に沿って切断すると、その断面に螺旋が見られる（図 6）[18]。オウムガイは軟体動物門頭足綱の生物で、もともとは細長い円錐形状のイカのようなものが平面状に巻いて現在の形態に至ったと考えられている。したがって、この断面に見られる螺旋は、殻が巻いた際に外壁が重なって形成されていると考えればよい。

オウムガイの切断した外殻を固定し、内部の螺旋に垂直な二方向の接線を引く。【図 6】では写真に対して水平方向と鉛直方向に接線を引いている。このとき、水平方向の接点はほぼ一直線上に並ぶ。また、鉛直方向の接点も同様である。したがって、接点を結んだ二本の直線は直交し、その交点としてこの螺旋の中心が得られる。この事実から、この螺旋が等角螺旋すなわち対数螺旋であることが推察される。また、水平方向の接線が鉛直方向の接線で切り取られる線分のそれぞれの長さを測定すると、短い方から順にほぼ黄金比倍（φ 倍）となっていることがわかる。また、これは鉛直方向の接線長でも同様で、さらに、隣り合う接線長はほぼ黄金比の平方根倍（√φ 倍）となっている。これらの事実から、この接線が 180 度ごとに黄金比を比率として増加すること、したがって、この対数螺旋も動径が同様の比率で増加する対数螺旋であることがわかる（実際には、実験の結果から黄金比よりもわずかに大きな比率となる）[19]。

ヒマワリとオウムガイの例は、これらの形態に「黄金比」に関わる性質が潜んでいることをうかがわせる。もちろんこれらの例がそれぞれの固体における偶然の結果であると考えることもできる。しかし、その他の生物の形態にもこの比に関わる諸性質が見出されることを考えると、「黄金比」が自然における特別な調和を意味するとも感じられる。それはまさに自然の神秘の一端がこの比をとおして映し出されるかのごとくである。

上で示した三つの視点に対する具体例から、「黄金比」と人間の関わりについての一つの特徴が見えてくる。そもそもこの比は数学概念であり、それゆえに数学理論の展開に応じて人間営為との関わり方も変化する。人間はそのようにして歴史のさまざまな局面で種々の対象の把握にこの比を用いてきた。数学概念としての度合いの違いこそあれ、その各局面においては、この比があたかも一断片として加えられることでモザイク画全体が揺るぎない形で完成を見るかのごとくである。

それと同時に、上の三つの視点を考えるならば、この比が単なる数学概念以上に人間営為に意味を与えてきたと見て取ることができる。数学概念としての調和や神秘性は、芸術などの人間の創造活動といった文化営為にも影響を与えてきた。これは、人間が「黄金比」を自ら積極的、能動的に用いてきたことを意味する。その一方で、この比が自然界におけるさまざまな局面に登場することは、人間にその存在を受動的に認めることを促す。しかし、それは人間にとっては決して消極的な事柄ではない。むしろ、この比を用いて自然を把握しようとする試みは、それ自体が自然の調和と神秘性を自ら受け入れることを正当化する行為だからである。

このようにして、「黄金比」は人間とそれを取り巻く自然に対する理解に対して一つの価値を形作ってきたのである。

§４．「黄金比」の名称に関する歴史経緯

これまで見てきたように、「黄金比」は数学において最も広範な応用性を内在した概念の一つで、それだけに歴史上のさまざまな人間営為に関わってきた。その一方で、この概念をめぐってはなおも検討されるべき問題が残されている。その一つは名称の問題である。調和や神秘性という視点から考えると、確かに「黄金比」（*golden ratio*（英））という名称はそれ自体この比を表すのにふさわしいとも感じられる。それは、歴史の諸場面で用いられるこの比が“‘‘理想的な比率”あるいは“完全性”という意味合いを備え、最高の位に属する比、最も“崇高な”比といった意味合いを呈しているとも思われるからである。それでは、この「黄金比」（*golden ratio*）という命名はいつの時代の誰によるものなのであろうか。

この問いに答えるのはそれほど容易ではない。むしろ、この比に関する歴史経緯をたどるならば、この比が時代によって少なくとも三つの名称—“外中比”（*extreme and mean ratio*）、“神聖比”（*divine proportion*）および“黄金比”（*golden ratio*）（欧文はいずれも英語表記）—で呼ばれていた事実が浮かび上がってくる。以下では、これらの三つの名称について歴史的な経緯を紹介する。

(1) 古代ギリシアにおける“外中比”の導入

この比に関して最初の明確な定義を表わしているのは、おそらくは古代ギリシア、アレキサンドリアの数学者ユークリッド（Euclid：B.C.300 頃； ギリシア語名エウクレイデス Eukleides）であったと推察される。

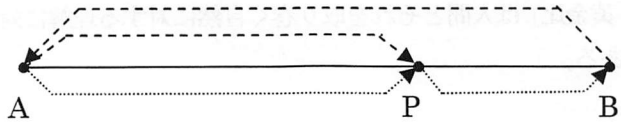
彼の編纂によるとされる『ユークリッド原論』では、この比を“外中比”（*ο ακρος και μεσος λογος*（ギリシア語）；extreme and mean ratio （英語））と呼び、次のように定義している。

第VI巻定義３

「線分は、不等な部分に分けられ、全体が大きい部分に対するように、大きい部分が小さい部分に対するとき、外中比に分けられたといわれる。」[20]

また、第VI巻命題 30 において、ユークリッドは外中比の作図—むしろ幾何学的意味—についても示唆している[21]。

定義３はむしろいわゆる“黄金分割”—すなわち、線分を「黄金比」に内分すること—を意味している。この定義を図示したのが【図 7】で、



【図7】

点Pは線分AB　を

$$AB : AP = AP : PB$$

となるように内分する。逆に、この比例式の内項と外項の積をとれば

$$AP^2 = AB \cdot PB$$

となって、APを一辺とする正方形と二線分ABとPBがつくる矩形との面積が等しくなり、この比の幾何学的意味の一つが導かれる（注20参照）。

その一方で、『ユークリッド原論』第XIII巻では“外中比”に関するいくつかの性質が示されている。上の定義が線分の分割を表していたのに対し、第XIII巻命題3では“外中比”の値に関する議論がなされている。これは、上の【図7】を用いれば、

$$PB/AB = 1/\{(1+\sqrt{5})/2\} = (\sqrt{5}-1)/2$$

に相当する[22]。また、命題8では正五角形の対角線が互いに他を“外中比”に内分することも述べられている[23]。さらに、この巻の後半ではとくに正多面体の性質が議論され、正十二面体や正二十面体などの正多面体に登場する“外中比”の議論がなされている。

したがって、『ユークリッド原論』の記述は、線分の分割を基礎とした幾何学的議論ではあるが、本稿第3節(1)で示した「黄金比」の基本的な性質について言及していることがわかる。

(2) ルネサンス期の“神聖比”

古代ギリシアの“外中比”が中世のなかでどのように受け継がれ、また、この名称以外にどのように呼ばれていたかについてはほとんど不明である。しかし、15世紀のイタリア・ルネサンス期においてはこの比が“神聖比”（divine proportion（英語））と呼ばれた事実が残されている。今日知られているところでは、イタリアの聖フランシスコ会の修道士で数学者のルカ・パチョーリ（Fra Luca Pacioli：ca.1445-1571）がこの名称を用いた『神聖比例論』（*Divina proportione*）[24]を著している。この書は、1498年に当時のミラノ公ルドヴィーコ・スフォルツァ（Ludovico Sforza）に献上するために手稿本として書かれている。これは基本的には正多面体から派生する多数の多面体について論じた書であるが、その巻末にはレオナルド・ダ・ヴィンチによるとされる56紙葉もの多面体のデッサン（最後の球を含めて）が添えられている。パチョーリとレオナルドは1500年頃にともにミラノを出てフィレンツェに赴く。その後、この書は1509年にヴェネチアにおいて活字本として再編され出版されている。

『神聖比例論』においてパチョーリは、いわゆるプラトン図形と呼ばれる正多面体やアルキメデスの準正多面体およびそれらから派生するさまざまな種類の多面体について扱っている[25]。ここで注意すべき点は、正多面体には「黄金比」に関わる性質が見出されるという点である。そもそも正多面体の一つである正十二面体の各面は正五角形であり、上で見たように「黄金比」が直接関係する。さらに五種類の正多面体の間には「黄金比」に関わる相互関係が見出される。たとえば三枚の黄金長方形[26]を組み合わせることでて正二十面体を作ることができ、こらから正二十面体が、正八面体の各辺を「黄金分割」する点で正八面体に内接することがわかる。こうした「黄金比」に関わる正多面体の相互関係を考えれば、正多面体を中心に据えた多面体論においては「黄金比」が重要な要素となることがわかる。

パチョーリは正多面体研究の基礎をプラトン（Platon：ca.B.C.427-B.C.347）のアイデアに置いている。プラトンは五種類の正多面体を、世界を構成する土・水・空気・火の四元素および宇宙を構成する第五元素に対応させ、それぞれの元素の形としていた—それぞれの元素に対して、正六面体は土に、水は正二十面体に、空気は正八面体に、火は正四面体に対応し、崇高なる宇宙は正十二面体に対応するとしていた（「ティマイオス」）[27]。パチョーリもこれに倣い、本書冒頭の目次に相当する内容一覧において、「プラトン主義者による」と明記しながら、第26章で火の形をなす正四面体、第27章で土の形をなす正六面体、第28章で空気の形をなす正八面体、第29章で水の形をなす正二十面体について述べるとし、続く第30章で「本質の形体」として正十二面体について扱うと記している。実際、本文においては第5章でプラトンの「ティマイオス」によると明記しながら、正十二面体を除く四つの正多面体が上で示した各元素に対応すること、そして、十二個の正五角形からなる正十二面体こそが“第五元素”である宇宙に対応し、聖なる比から構成されることを説明している。したがって、パチョーリは、正十二面体およびそれを構成する正五角形に関わる比率としての「黄金比」は重要な意味をもち、それが崇高な宇宙に対応するがゆえに“神聖なる比”と呼ばれるにふさわしいと考えていたことが見出される。一方、第26章～第30章においては、それぞれに対応する正多面体について幾何学的性質について説明している。

(3) 19世紀における“‘黄金比”の命名

「黄金比」が古代ギリシアにおいて“外中比”、ルネサンス期に“神聖比”と呼ばれたのに対し、今日の“黄金比”なる名称が登場するのは漸く19世紀になってからのことであったと推察される。岩田はドイツの数学者トロプケ（Johannes Tropfke：1866-1939）による『初等数学史』（*Geschicht der Elementar-Mathematik*）の記述を取り上げ、この名称が当時のドイツの数学者オーム（Martin Ohm：1792-1872）[28]によるのではないかと指摘している[29]。“黄金比”（実際には“黄金分割”）なる名称の由来に関するオームの記述については、マリオ・リヴィオ（Malio Livio）の著作『黄金比』（The Golden Ratio）[30]にも記されている。

以下では実際にトロプケの『初等数学史』における記述を参照してみる。トロプケはこの比のルネサンス以降の展開についてふれた後で、脚注において19世紀における“黄金分割”

（ドイツ語ではGoldenen Schnitt）という名称の導入について注釈を施している[31]。トロプケによると、オームは1835年の『純粋初等数学』（*Reinen Elementarmathematik*）において「･･･任意の線分がそのような比をもつ二つの部分に分割されるとき黄金分割と呼ばれている」と記しているという。同時に、オームの1819年の著作『初等幾何および三角比』（*Elementare geometrie und Trigonometrie*）ではこの名称が用いられていないことも指摘している。また、トロプケは、この“黄金”という名称が、中世以来の“三数の規則”[32]あるいは聖書の“黄金律”[33]との混同に由来するという点を示唆している。

一方、マリオ・リヴィオはオームの記述をさらに検討し、上で引用したオームの記述から“黄金分割”なる名称がオーム自身による導入ではないとし、さらにこの1835年のオームによる『純粋初等数学』は第二版であって、1826年に出版されたこの書の初版では“黄金分割”なる名称が登場しないことを指摘している。マリオ・リヴィオは、とくに1830年頃になって“黄金分割”という名称が数学者やあるいはそれ以外の分野の人々の間で用いられていたのではないかと推測している。加えて、とくに19世紀後半には、“黄金分割”に限らず“黄金比”あるいは“黄金数”なる名称がさまざまなところで見られるようになるとも記している[34]。

§５．“神聖比”の名称の由来に関する一考察

前節で示したとおり、「黄金比」は、古代ギリシアの“外中比”およびルネサンス期の“神聖比”を経て19世紀になって漸くその名称にたどり着く。古代ギリシアにおいては基本的には線分を分割するという幾何学的様相からの命名であり、そこに“崇高な比”あるいは“調和した比”などという意味合いは含まれない。一方、19世紀以降の「黄金比」の名称が偶然の産物であったとしても、その名称が宗教性などといった基盤をもつとは考えにくい。むしろ、「黄金比」に関する数学的な諸性質が明らかになりつつあるなかにあって、人間の感性的な営為、人為を超えた自然におけるこの比の存在を数学的な客観認識として捉えることが試みられたのではないか。そこには、自然が備える調和とそれに対する人間営為の根底をなす一つの原理として「黄金比」を捉えようという意識が見出されるのである。それゆえに、19世紀から20世紀にかけての数学、科学の諸分野の展開のなかで、「黄金比」の名称はある種の神秘性を保ちながらも人間を取り巻く最も根幹をなす比として受け入れられていったと思われる。

それでは、ルネサンス期の“神聖比”はどのような経緯の下で導入されたのであろうか。上で述べたように、パチョーリの著作『神聖比例論』は“神聖比”（divina proportione）を表題とした書物としては最初のものであろうと見なすことができる。しかし、彼自身がこの名称を最初に導入したかどうかについてはなおも検討の余地が残されていると思われる。以下ではパチョーリ、ピエロ、レオナルドのそれぞれの著作を検討し、そこからこの問題を解き明かす一つの方向性を提示する。

(1) パチョーリ、ピエロの記述

まず、パチョーリ自身の幾何学に関する研究について検討してみる。パチョーリは生涯をとおして数冊の著作を著したに過ぎないとされている[35]。1498年の『神聖比例論』以前には、パチョーリは1494年に最初の著作“Summa”（『数学大全』）を著している。この書は正式には『算術，幾何学，比および比例論に関する大全』（*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita,*）と題され、とくに今日では複式簿記について扱った書として知られている。この”Summa“に関してジャヤヴァルデンは次のように述べている．

「この書は、ある種の実践的な計算書のように、特別な種類の職人たちに向けられたものではない．むしろ、イタリア語で書かれた百科事典のような書物で、算術の理論および実際の応用、代数学の基礎、当時のイタリア各地で用いられていた貨幣や重さ・長さの表、二重簿記の取り扱い、および、ユークリッド幾何学の概要などといった一般的な内容が含まれている．・・・“Summa”は独創性にこそ欠けていたが、16世紀を通して広く流布し、多くの数学者たちに研究された。」[36]

したがって、時代的に未だ数学専門書が著されることが非常に稀である点を考えても、この“Summa”は実用的な意味を込めた貴重な書であったと考えることができる。

“Summa”の第二部が幾何学に関する部分で、パチョーリはこのなかでユークリッド『原論』の内容について、部分的に、また、原典を書き直す形で紹介している。第1区分第4章が『原論』第VI巻に相当するが、ここでは「黄金比」を意味する“外中比”が古代ギリシア同様に“extreme and mean ratio”（ラテン語 medium et duo extrema の形）で与えられている[37]。また、第VI書の命題29にしても、この書の後半の正五角形や正十二面体に関する部分にしても、“神聖比”(divina proportione) の用語やそれに関わる記述は一切見られない[38]。この書の幾何学部分はユークリッド『原論』の忠実な再現ではないが、むしろ面積や体積などといった幾何学の応用に主眼が注がれている[39]ことを考えると、パチョーリはこの時点では“外中比”に関しても幾何学的に与えられた概念以上には関心をもっていなかったことが推察される。

その一方で、パチョーリの『神聖比例論』に関しては、この書がピエロ・デラ・フランチェスカ（Piero della Francesca：ca. 1416-1492）による同じ主題に関する著作の剽窃ではないかという点に注意することが重要である。実際、今日ではピエロが1482年頃に『五つの正多面体について』（*De quinque corporibus regularibus*）という論考を著していたことが知られている。ジョルジュ・ヴァザーリ（Giorgio Vasari：1511-1574）は、パチョーリがピエロの弟子であり、恩師によるこの未刊の書を自らの名で出版したとして非難を顕わにしている。

「数学、幾何学および正多面体の図学的処理に関して、傑出した大家とみなされていた

が、老年になってからの失明、それに続く死のために、優れた業績や、書き上げられた論文は公にされなかった。論文は今もなお故郷のボルゴに残されている。この人の名誉を全力を傾けて推挽すべき人物が、すべてをこの人から学んだのであるから当然そうすべきであるにもかかわらず、邪な悪意を抱いて、師ピエーロの名を葬ってしまった。そして師のみに捧げられるべき栄光を、すなわち、数学などの前述の学問ばかりでなく、絵画にも秀でていた善良なる老師の全業績を、自分の名、フラ・ルーカ・ダル・ボルゴを冠せて出版することによって横取りしようとしたのであった。」[40]

ピエロの論考は今日ではその存在が確認され、手稿が活字におこされた形で復刻されている[41]。この復刻版にはピエロによる手稿とともに、それを活字におこした上でパチョーリ『神聖比例論』との比較検討も含めた注解が付されている。ピエロの論考では確かに五種類の正多面体の諸性質について議論してはいるものの、当該の比に関して“神聖比”という名称は用いられていない。むしろ、この書は専ら正多面体に関する幾何学的説明に終始しているということができる。具体的には、第一部の［命題XXX］～［命題XXXVII］（手稿、紙葉14裏～18表）で正五角形について扱っているが、ここでは当該の比に関して古代ギリシアの“外中比”と同様の表現（proportionem medium et duo extrema）がなされている。また、多面体を扱った第二部の［命題XXVII］～［命題XXX］（手稿、紙葉32表～35裏）で正十二面体の性質を論じているが、ここでも上と同様の表現が用いられている。

パチョーリの『神聖比例論』をめぐっては、それがピエロからの剽窃であったという非難や、あるいは、むしろその公表によって当時の正多面体に関する数学的議論の状況を明らかにした功績への評価という点で議論の余地が残されていることも確かである。しかし、そうした問題とは離れて“神聖比”という名称に着目するならば、これら双方の著作を見る限りでは、少なくともこの名称がピエロによるものではなくパチョーリが“独自に”用いたのではないかという推測が可能になる。

(2) レオナルドの「パラゴーネ」に見られる記述

ところで、“神聖比”という言葉に関しては非常に興味深い事実がある。それはこの言葉がレオナルド・ダ・ヴィンチ（Lenardo da Vinci：1452-1519）が著したとされる『絵画論』（*Trattato della pittura*）の冒頭の「パラゴーネ」（Paragone、諸芸術比較論）に登場するという点である。それはレオナルドの「パラゴーネ」における絵画と音楽、詩を比較する部分に相当する。この事実を考えると、次項で詳細を述べるようにパチョーリの“神聖比”がレオナルドに由来すると推察される。

向川は2002年の論文[42]においてすでに「パラゴーネ」における“神聖比”なる言葉の存在についてふれ、さらに、“神聖比”（向川によれば神聖比例、divina proportione）と記された部分が三箇所あると指摘している。向川自身は、この『絵画論』における“神聖比例”や“調和比例”などの記述をレオナルドの人体比例論研究と結びつけて検討することで、“神聖比”

が「黄金比」を意味すると結論づけている。向川の結論は、レオナルドにとって「黄金比」あるいはそれに収斂するものとしての「フィボナッチ数」が既知の概念であったという前提に立っている。レオナルドがこうした概念を把握していたかどうかという問題はなおも十分な議論が必要であると思われるが、ここではこの問題は保留し、レオナルドの記述について検討を進める。

レオナルドの『絵画論』は彼自身の手による手稿ではなく、その死後に弟子であったメルツィ（Francesco da Melzi：1493-1570）の手によって編集された写本である。これは現在「ウルビノ稿本」（Codex Urbinas Latinus 1270）と呼ばれている。その経緯については、裾分『レオナルドの手稿、素描・素画に関する基礎的研究』[43]に詳細が述べられているので、ここでは本稿に直接関連する事柄だけを記しておく。それは、レオナルドがミラノ滞在中に絵画に関する書の一部を構想し完成させていたと推察される点である。いわゆる「スフォルツァ絵画論」の存在である。この手稿は現存しないため推察の域を出ない部分が多いが、裾分はパチョーリの記述などを挙げてその信憑性を論じている[44]。これは向川も同様である。また、その内容が今日残されている『絵画論』にどの程度反映されているかという点でもなお議論の余地があることも事実である。こうした問題をふまえながら、以下では『絵画論』の「パラゴーネ」の記述ついて紹介する。

「パラゴーネ」における“神聖比”に関わる部分に関しては向川も当該箇所を訳出しているが、ここではその記述とM.ケンプの英訳[45]も参照しながら、カルロ・ヴェッチェの原典翻刻の新版『レオナルド・絵画の書』（Libro di Pittura）[46]を基にしてレオナルドの記述を検証する。ヴェッチェ版では［第27節］とされ「画家と論争した詩人に対するマティアス王の応答」と小題が付された下りに“神聖比”が登場する（「ウルビノ稿本」紙葉14Verso-15Recto）。ここでは、マティアス王の誕生日に詩人と画家から献上された詩と肖像画に対して、王が肖像画を賞賛する場面が述べられている。

「･･･我々の魂が調和によって構成されることを君はわからないのか･･･君の作品（詩）は調和の比を成し得ないという理由だけで明らかに画家の作品より劣ると判断される。それが聞き手や観る者の心に満足を与えないのは、余の眼前にある（肖像画の）顔に見出される神聖なる美を構成するいとも美しい容貌を形作る比例を備えていないからである。対照的に、それらの美しい部分が瞬時にして結合し、神聖なる比を伴って余にこの上ない喜びを与えるのである。余は、人間がなし得るもので、この世でそれに勝るものはないと判断するのである。」

これ以外にも、ヴェッチェ版［第23節］（「ウルビノ稿本」紙葉11Verso-12Recto）には以下のような記述が見られる。

「詩人は言葉を多用する以外に美の諸要素を表現することはできず、それゆえにそうした

諸要素を描写することはできず、神聖なる比によって創出される調和の比を構成することはできない・・・」[47]

また、ヴェッチェ版［第32節］（「ウルビノ稿本」紙葉18Recto）には以下のような記述も見られる。

「・・・そうした歌唱には調和ある比の恩恵に浴することはなく・・・詩人が美しい顔に喩えて創作するものは決して十分な納得を与えない・・・美はそうした全体が組み合わされて生じる神聖なる比のうちにのみ存在し得る。全体が一つとして扱われ神聖なる調和を構成するときに限って、観る者を魅了するのである。」

これらの記述から、レオナルドが確かに“神聖比”（divina proportione）なる記述を残していることは明らかである。しかし、「パラゴーネ」の記述だけに限るならば、レオナルドが果たして数学的な意味での「黄金比」をこの言葉に重ね合わせているかどうかは定かではない。上でふれた向川の研究では、レオナルドの人体比に関わる他の手稿と関連づけることでこの“神聖比”が「黄金比」あるいは「フィボナッチ数」に相当することを指摘していることになる。その反面、上で引用したレオナルド自身の記述から読みとれるのは次の事柄である。それは、美は全体が調和を備えた比例関係を保つなかにのみ存在し、その比例関係を構成するものが“神聖比”であるという点である。

したがって、レオナルドのいう“神聖比”が果たして数学的な「黄金比」を意味するかどうかという問題は別な議論に委ねるにしても、レオナルドの「パラゴーネ」には“神聖比”という名称が登場することは確かであることがわかる。

(3) “神聖比”なる名称について―パチョーリとレオナルドの関係 をふまえて

レオナルドが“神聖比”なる名称を導入した経緯―この名称がレオナルドによって初めて用いられたものであるのか、あるいは、当時すでに何らかの形で用いられていたのか―については確かなことはわかってはいない。しかし、もしこの名称がレオナルド自身の創作であるならば、その意識の根底をレオナルドの自然観などから想像することは可能であると思われる。

たとえば、本稿の主題からは多少離れるがレオナルドの「水」に関する研究を考えてみる。レオナルドは自然のさまざまな有り様を観察し、それを描写しながら考察を施している。その対象は自然の諸現象、植物や動物、人体にまで及んでいるが、とくに注目した対象のひとつが水であったことがうかがえる。実際、今日残されている手稿には膨大な量の水に関するノートが見られる。おそらくレオナルドは、水が単に人間の生にとって不可欠であるからだけではなく、同時に自然の賜物として人間の精神にも大きく関わると考えていたのではないだろうか。水が人間をはるかに超えた自然存在であり、レオナルドはそこに偉大なる自然の

力や美しさを見出していたと思われるのである。

レオナルドが 1490 年頃に記したとされる『パリ手稿C』には、水に関する次のような記述が見られる。

「水は、４つの構成要素のうち第二に重さが少なく第二に不安定である。水は、それの海の要素と結び付くまで決して休むことがない。海はでは、風によって妨げられない限り、地球の中心から水面を等距離に保って溜まり、休息する。水は、生命をもつあらゆる肉体の養分であり体液である。水なくしては何ものもその最初の形を保つことが出来ない」[48]

すなわち、レオナルドは生命の源という意味で水の精神性をとらえていたと考えることができ、そうした記述は手稿の随所に見出される[49]。

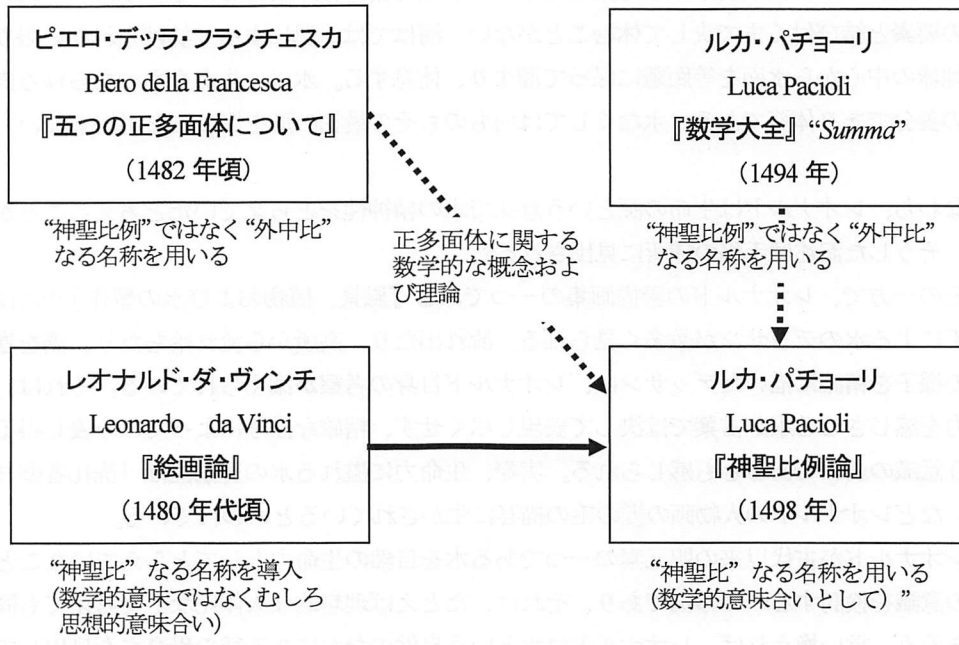
その一方で、レオナルドの素描画集の一つである『風景、植物および水の習作』[50]には彼の手による水のデッサンが数多く見られる。流れ出たり、高所から流れ落ちたり、渦を巻く水の様子を精確に描いたデッサンに、レオナルド自身の考察が添えられている。それは、生命力を感じさせる水が言葉では決して表現し尽くせず、精確な描写によってのみ表し得るという意識の表れであるとも感じられる。実際、生命力に溢れる水の運動性は「洗礼者聖ヨハネ」などレオナルドの人物画の髪の毛の描写に生かされているといわれている。

レオナルドが古代以来の四元素の一つである水を自然の生命力としてとらえていたことは、彼の意識を検討する一つの例であり、それは、たとえば理想的な人体比などを考えても同様であろう。言い換えれば、レオナルドは水という自然のなかにある種の崇高さを見出していたことにつながると思われる。そして、その崇高さこそが自然が備える調和であり、彼が神聖さと称したものではなかったか。レオナルドは水の描写を重ねた。そこには精確に模写することでこそ表現し得る自然の美、調和が存在していたのであり、その最も根幹をなすものが神聖さであったのではないかと思われるのである。

ここでレオナルドによる“神聖比”なる名称が自然の調和に由来するというのはあくまで一つの推測に過ぎない。また、その根底にプラトンの正多面体論を位置づけていることも推測であることはいうまでもない。その一方で、パチョーリが『神聖比例論』において五つの正多面体をプラトンに結びつけ、“宇宙”を構成する第五元素に対応する正二十面体を中心とする議論のなかで「黄金比」を“神聖比”と称したことはこの書に記されたとおりである。

実際、レオナルドとパチョーリは 1490 年代後半にミラノで親交を深めた仲であった。レオナルドの手稿には『ユークリッド原論』を学んだ跡が見られるが、その記述がパチョーリと出会った直後から始まることを考えると、レオナルドがパチョーリをとおして幾何学を勉強したことも推察される[51]。こうした事実をふまえると、果たしてレオナルドが“神聖比”を数学的な意味としての「黄金比」と把握していたかは別としても、パチョーリが崇高なる調和という意識からその比を“神聖比”と称したことには、レオナルドの「パラゴーネ」に見られる記述との間に強い関係性が見出されると考えられるのである。

本項の最後に、レオナルドの『絵画論』の「パラゴーネ」、パチョーリの“Summa”および『神聖比例論』およびピエロの『正多面体論』の各著作に対し、「黄金比」の概念としての「外中比」および“神聖比”を中心とした系譜を図式化して示しておく（【図８】）。



【図8】

§６．おわりに

本稿では「黄金比」なる概念に対していくつかの考察を試みた。その際のキーワードは調和と神秘性であった。とくに、前半では人間が「黄金比」をとらえる上での三つの視点を設定し、それぞれに対して具体的事例を挙げることで、人間営為におけるこの比の存在意味について検討した。また、後半では、この比の名称の系譜に着目し、とくにルネサンス期の“神聖比”なる名称の由来をレオナルド・ダ・ヴィンチに求めながら、この比のもつ意味や精神性について検討した。

前半では「黄金比」に対して調和と神秘性から三つの視点を設定したが、その議論は以下のようにまとめることができる。

数学がそうであるように「黄金比」もまた人間精神の所産であり、人間精神の内奥に設定された視点からの創造物である。しかし、人間は決して“数学概念”を発明はしない。“数学概念”は本来人間を取り巻く世界に何らかの形で常に存在するものであり、人間は図形や数

量あるいは幾何学や微分積分学といった“視点”を設定することで、そこから見ることのできる範囲のベールを剥ぐだけだからである—強いていうならその視点を設定すること、その意味で数学概念を創造することが“発明”ともいうことができるが—。したがって、「黄金比」が正五角形をめぐる図形的諸性質のなかで認識されようと、やがてそれが無限連分数として表示されようと、それは人間の視点がその部分を捉えた結果に過ぎないということになる。

このように考えると、「黄金比」がもつ神秘性にはいくつかの位相があると感じられる。一つは、正五角形内に描いたペンタグラムが中心に向かって収束する一連の正五角形の列を生じさせること、その一辺と対角線の比が単位“1”のみを用いた“最も単純な”無限連分数で表されることが映し出す神秘性である。これは一定の規則に従う最も単純な反復という調和から生じる“尽きないもの”が、その無限過程の果てでは人間精神の根底を越えて一つの“尽きる”概念に収束することを意味する。その一方で、そうした本来は“尽きない比”に対し、数学は人間精神、理性をしてそれに準ずる近似分数—すなわちフィボナッチ数の隣接二項間の比—の対応へと導く。これは、現実世界において人間営為とこの比の整合性をはかることを意味する。そして、自然界に見出されるように、それは離散的存在への適合という別な神秘性を生じさせる。さらに言うなら、人体比や絵画、建築の構成といった人間精神がなす創造にもこの比が一つの基準、指標として用いられてきた経緯が見て取れる。これは、この比が人間精神に調和としてある種特別な影響を与えてきたことを意味するが、これもまたこの比のもつ神秘性として捉えられるのである。

そして、後半での論点は、レオナルドが自然や人間に対する美の概念—調和や神秘性—に準拠して「黄金比」を“神聖比”と呼んだのではないかとう問題提起であった。そして、それはまさにルネサンスという時代性を反映しての出来事であったのではないかという点が問題であった。本稿では“神聖比”なる名称がレオナルドに端を発するという仮説を展開させたが、実際、古代気リアにおいて“外中比”と呼ばれたこの比が人間精神と自然との関係性のなかで“神聖比”と呼ばれるに至った経緯を考えると、それはルネサンスという時代性がゆえにもたらされた結果であると考えることができる。

ルネサンス期の芸術に対して造詣の深いフィールド（J. V. Field）は次のように述べている。「ルネサンスは時代に対してではなく、その様式に対しての名称である。」[52] それは、ルネサンスが、人間を自然のなかに位置づけるという点で調和や美、さらには神聖性なる思考を促す上で意義深い時期であることを考えてみれば容易に納得ができる。そして、「黄金比」—当時として命名された“神聖比”—はまさに恰好の題材であったのではなかったか。それはこの比が、古代ギリシアに端を発する幾何学という理性に裏打ちされ、同時に、人間が神の内にある完全性や神秘性を追い求めようという感性に応えるべく性格をも備えていたからであろうと思われる。

そして、この比のそうした二面性は、現在もなお同じ問題をわれわれに訴えかけているのである。

参考文献

Leonardo da Vinci, *Libro di Pittura, Edizione in facsimile del Codice Urbinate lat. 1270 nella Biblioteca Apostolica* Vaticana, a cura di Carlo Pedretti, Trascrizione critica di Carlo Vecce, Firenze, Giunti Gruppo Editorale 1995.

Leonardo da Vinci, *I manoscritti dell'Institut de France, Il manoscritto C*, trascrizione diplomatica e critica di Augusto Marinoni ; Japanese ed., Iwanami. -- (Edizione nazionale dei manoscritti e dei disegni di Leonardo da Vinci).

Leonardo da Vinci, *Il codice Arundel 263* : nella British Library, edizione in facsimile nel riordinamento cronologico dei suoi fascicoli a cura di Carlo Pedretti ; trascrizioni e note critiche a cura di Carlo Vecce ; : set, tavole, testi. -- Giunti, 1998.

Pacioli,Luca, *De Divina Proportione*, Fontes Ambrosiane in Lucem Editi cura et studio Bibliothecae Ambrosianae 72, Milano, [Silvana Editoriale], 1986.

Pacioli, Luca, *Divina proportione: opera a tutti glingegni perpicaci e curiosi necessaria oue ciascum studiofo di philosophia, prospectiua pictura sculptura, architectura, e musica, e altre mathematice, suauissima, s ottile, e admirabile doctrina consequira, e delectarassi, co varie questione de secretissima*, Venezia [Paganino Paganini], 1509, Tokyo, Bunryu reprint, 1973.

Pacioli, Luca, *Divine Proportion*, traduction par G. Duchesne et M. Giraud, Libraire du Compagnonnage, 1998.

Pacioli, Luca,*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Reprint (Originally published,Venice, 1494), Kyoto, Daigakudo Books, 1973.

Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, Giunti Gruppo Editoriale, Firenze, 1995.

Tropke,Johannes, *Geschicht der Elementar Mathematik*, Berlin und Leipzig, 1923, Band 4.

Lawlor, Robert, *Sacred Geometry-Philosophy and practice*, Thames and Hudson, 1998

Heath, Thomas L., "*The Thirteen Books of Euclid's Elements*", vol.2, Dover, 1956

Livio, Mario, *The Golden Ratio*, Broadway Books, 2002.

Smith,David Euggene, History of Mathematics, Vol. II, Dover, 1958.

Jayawardene, S. A., "Luca Pacioli", *Dictionary of Scientific Biography*, vol.10.

Kemp, Martin, *Leonardo on Painting*, Yale University Press, 1989.

Field, J. V., *The invention of infinity*, Oxford University Press, 1997, p.1.

レオナルド・ダ・ヴィンチ、『風景,植物および水の習作』、レオナルド・ダ・ヴィンチ素描集：ウィンザ-城王室図書館所蔵；第1輯、岩波書店、1985年.

プラトン、「ティマイオス」53C-56C、種山恭子・田之頭安彦訳、『プラトン全集12』、岩波書店、1975年.

ヴァザーリ、ジョルジュ著、平川祐弘・小谷年司・田中英道訳、『ルネサンス画人伝』、白水社、1982年.

東川和夫、「ひまわりのたね」、『数学セミナー』、日本評論社、1985年7月号、pp.34-42.

岩田義一、「黄金分割と葉序」、『数学セミナー』、1963年11月号、日本評論社、pp.8-11.

裾分一弘、『レオナルドの手稿、素描・素画に関する基礎研究』、中央公論美術出版、2004年.

中村他訳、『ユークリッド原論』、共立、1771年

西野嘉章著、『西洋美術書誌考』、東京大学出版会、2009.

向川惣一、「レオナルドの『人体権衡図』研究--その「円」と「正方形」について」、『美術史』、

40(1)、1991年、美術史学会、pp.98-113.
向川惣一、「レオナルドのパラゴーネにおける「神聖比例」の意味」、『美術史』、第152冊（vol.LI, No.2)、2002年、美術史学会、pp.282-295.
永井繁樹・平野葉一、「ルカ・パチョーリ著『神聖比例論』1」、東海大学総合教育センター紀要、第26号（2006)、pp.77-100.
坂本秋奈・平野葉一、「数学の文明性に関する一考察—ユークリッド『原論』をめぐって—」、『文明研究』、東海大学文明学会、第28号（2009年)、pp.73-110.
平野葉一・山上明・谷晋、「オウムガイの螺旋構造に関する一考察」、『東海大学文明研究所紀要』、東海大学文明研究所、第17号（1997)、pp.97-102.
平野葉一・坂本秋奈・笛木章子：「レオナルド・ダ・ヴィンチとユークリッド『原論』—『パリ手稿』を中心に」，『中日近現代数学教育史』，北京師範大学・内蒙古師範大学・大阪教育大学発行，第六巻，2007年，pp.22-38.

---

1 古代ギリシアでは、整数どうしの分数（つまりは有理数）では表されない量を“通約不能量”と呼んだ。これは今日の無理数を意味する。正五角形の一辺と対角線の比は無理数となるが、これはピタゴラス学派による“通約不能量”の発見につながったともいわれている。

2 理想的な人体の数学的な比率に関する理論的な研究とされるが、今日には残されていない。その比を有する彫刻として“*Diadumenus*”(c. B.C. 430)と“*Doryphorus*”(ca. B.C. 450)の二作品が知られている。

3 “*De architectura*”；理想的な人体象として、両手を広げた人体が正方形に内接し、臍を中心とする円周上を手足が稼働するとしたモデルを提示。

4 “*Liber Abaci*”；アラビアの計算法について述べた書。この書には後に彼の名が付けられる“フィボナッチ数”に関する問題が載せられている：「生まれたばかりの一番（つが）いのウサギは2ヶ月目から毎月一番いずつウサギを産むとする。ある年の1月1日に一番いのウサギが生まれたとすると、この年の12月1日には何番のウサギがいることになるか。」

5 “*De quinque corporibus regularibus*”（注40参照）.

6 “*Libro di Pittura*”.

7 “*Divina proportione*”；手写本、ミラノ大公への献呈本。1509年に活字本が出版される。

8 “*Underweying der Messung mit dem Zirckel und Richtschyt*”.

9 “*Die Reine Elementar-Mathematik*”.

10 “*The Curve of Life*”；この書では、オウムガイの外殻がつくる螺旋が黄金比に関わる対数螺旋に近いことが示唆されている。

11 “*On Growth and Form*”；初版は1917年。この書でトムソンは生物の成長に関して“相対成長”なる概念を導入しているが、生物の形態に対する数学的解釈の一つとして黄金比やフィボナッチ数列との関わりについても紹介している。

12 「黄金比」の値である $\varphi=1.6180\cdots$ を“黄金数”ともいう。また、この逆数

$$1/\varphi=2/(1+\sqrt{5})=(-1+\sqrt{5})/2=0.6180\cdots$$

を黄金比と呼ぶ場合もある。

13 J.P.M. ビネは、フィボナッチ数列の一般項を次のように与えている：

$$f_n = (\varphi^n - (-\varphi)^n) / \sqrt{5}$$

14 たとえば“*Doryphorus*”像は、ローマ時代のコピーがミネアポリス美術館、ナポリ国立考古博物館に所

蔵されている。

15 Robert Lawlor, *Sacred Geometry-Philosophy and practice*, Thames and Hudson, 1998, p.59
なお、以下の論文では、レオナルドの人体像のデッサンに対し、黄金比を用いた等比数列を考えることで検討している。
向川惣一、「レオナルドの『人体権衡図』研究--その「円」と「正方形」について」、『美術史』、40(1)、1991年、美術史学会、pp.98-113.

16 写真のヒマワリは筆者が標本として作製したもの。

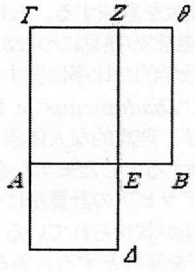
17 東川和夫、「ひまわりのたね」、『数学セミナー』、日本評論社、1985年7月号、pp.34-42.

18 【図6】の標本はオウムガイ *Nautilus pompiliu*（フィリピン原産）。

19 オウムガイの螺旋を対数螺旋として $r = A \cdot \exp(k\theta)$（A、kは定数）とおくと、この螺旋の成長率すなわち動径の増加率が180度ごとにφ倍となる際のkの理論値は$k=0.1532$、実際の測定値はやや大きく$k=0.1696$であった。詳細は以下を参照のこと。
平野・山上・谷、「オウムガイの螺旋構造に関する一考察」、『東海大学文明研究所紀要』、東海大学文明研究所、第17号（1997）、pp.97-102。

20 中村他訳、『ユークリッド原論』、共立、1771年、p.117。
ここでは、以下も参考にした。
Thomas L. Heath, "*The Thirteen Books of Euclid's Elements*", vol.2, Dover, 1956, p.188.

21 「与えられた線分を外中比に分けること。」（中村他訳、『ユークリッド原論』、p.145）。
Cf. Heath, "*The Thirteen Books of Euclid's Elements*", vol.2, pp.267-268 ("To cut a given finite straight line in extreme and mean ratio").
ここでは、正方形$B\Gamma$と面積が等しい矩形$\Delta\Gamma$が描かれ、かつ、矩形ΔAが正方形となるとき、点Eは線分ABを外中比に分割することが示されている。このとき、矩形BZと正方形ΔAの面積が等しいから、$B\theta = AB$を考えて、$AB \cdot EB = AE^2$、すなわち、$AB : AE = AE ; EB$となる。



22 「もし線分が外中比に分けられるならば、小さい部分と、大きい部分の半分とを加えたものの上の正方形は大きい部分の半分の上の正方形の5倍である。」（中村他訳、『ユークリッド原論』、p.413）。

23 「もし等辺等角な五角形において二つの線分が隣り合う二つの角を張るならば、それらは相互に外中比に分けあい、それらの大きい部分は五角形の辺に等しい。」（中村他訳、『ユークリッド原論』、p.417）。

24 本稿ではルカ・パチョーリの『神聖比例論』の原典の復刻版として以下を用いた。
・1498年版の復刻版（手写版の復刻版）
Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, Fontes Ambrosiane in Lucem Editi cura et studio Bibliothecae Ambrosianae 72, Milano, [Silvana Editoriale], 1986.
・1509年版の復刻版（活字版の復刻版）
Luca Pacioli, *Divina proportione: opera a tutti glingegni perpicaci e curiosi necessaria oue ciascum studiofo di philosophia, prospectiua pictura sculptura, architectura, e musica, e altre mathematice, suauissima, s ottile, e admirabile doctrina consequira, e delectarassi, co varie questione de secretissima*, Venezia [Paganino Paganini], 1509, Tokyo, Bunryu reprint, 1973.
また、以下の仏語訳も参照した。
Luca Pacioli, *Divine Proportion*, traduction par G. Duchesne et M. Giraud, Libraire du Compagnonnage, 1998.

[25] パチョーリの『神聖比例論』の内容に関する概要および最初の部分の訳に関しては以下の拙稿を参照のこと。
永井繁樹・平野葉一、「ルカ・パチョーリ著『神聖比例論』1」、東海大学総合教育センター紀要、第26号（2006）、pp.77-100.

[26] 縦横比が黄金比となる長方形のこと。

[27] プラトン、「ティマイオス」53C-56C、種山恭子・田之頭安彦訳、『プラトン全集12』、岩波書店、1975年、pp.87-96.

[28] 電磁気学の研究で知られる物理学者 Georg Ohm（1789-1854）の弟。

[29] 岩田義一、「黄金分割と葉序」、『数学セミナー』、1963年11月号、日本評論社、pp.8-11。

[30] 本項のM.リヴィオの記述は、以下を参照した。
Mario Livio, *The Golden Ratio*, Broadway Books, 2002, pp.6-7.

[31] Johannes Tropke, *Geschicht der Elementar Mathematik*, Berlin und Leipzig, 1923, Band 4, p.187.
ここでのトロプケの記述はすべてこの書のp.187の脚注1416による。

[32] 古代ギリシア以来、インド－アラビアと受け継がれ、ルネサンス期にも議論された3数間の比例問題として「3数の規則」と呼ばれるものがある。数学史としてはこれ自体が検討に値すべき重要な問題でもあるので、ここではこれ以上追わない。たとえば以下を参照のこと：
David Euggene Smith, History of Mathematics, Vol. II, Dover, 1958, pp.477-494.

[33] キリスト教では、キリストによる"山上の垂訓"の一節を"黄金律"と呼ぶ。これは、「何事も人々からしてほしいと望むことは、人々にもそのとおりにせよ」（マタイ第7章第12節）を指す。ここでの類推は、ルネサンス期に"神聖なる比"と考えられていた「黄金比」がキリスト教の教義と結びつくことで誤って"黄金"なる名称の下で呼ばれたことを意味する。

[34] たとえば、1875年の"*Encyclopedia Britanica*"や1895年の"*American Mathematical Monthly*"、1900年の"*Nouveau Larousse Illustré*"（月の周期に関する記述）などを挙げている。

[35] パチョーリの生涯と業績については、以下の拙稿で多少ふれている。
坂本・平野、「数学の文明性に関する一考察―ユークリッド『原論』をめぐって―」、『文明研究』、東海大学文明学会、第28号（2009年）、pp.73-110（とくに第5節）.

[36] S.A Jayawardene, "Luca Pacioli", *Dictionary of Scientific Biography*, vol.10, p.270.

[37] ここでは以下の版を用いている。
Luca Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Reprint (Originally published, Venice, 1494), Kyoto, Daigakudo Books, 1973.
該当の箇所は"Summa"の幾何学部分から付けられた紙葉番号5の左ページで、"外中比"がユークリッド『原論』第VI巻の定義3と同様の形で述べられている。

[38] パチョーリが"Summa"のなかで"神聖比"という言葉を用いていない点は、向川も指摘している（注42の文献参照）.

[39] ユークリッド『原論』は論証体系に基づいて書かれた書であるが、パチョーリの関心はむしろ幾何学の実用的側面にあったと考えられる。

[40] ジョルジュ・ヴァザーリ著、平川祐弘・小谷年司・田中英道訳、『ルネサンス画人伝』、白水社、1982年、p.71.

[41] Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, Giunti Gruppo Editoriale, Firenze, 1995.
ピエロの手写本の復刻版に付された注解書の副題は以下のとおである。
"Corredato della version volgare di Luca Pacioli"

[42] 向川惣一、「レオナルドのパラゴーネにおける「神聖比例」の意味」、『美術史』、第152冊（vol.LI, No.2）、2002年、美術史学会、pp.282-295.

[43] 裾分一弘、『レオナルドの手稿、素描・素画に関する基礎研究』、中央公論美術出版、2004年.
この書の第四章に「ウルビノ稿本」をめぐる詳細が論じられている。

[44] Ibid., p.190参照.
パチョーリは『神聖比例論』の第1章において、「・・・すでに絵画と人体の運動に関する労作を完成さ

せた･･･」（注25の文献、p.96）と記している。

一方、西野は、フランスのアヴィニョンの市立図書館に所蔵されているカルベ（Esprit Calvet：1728-1810）の書誌一覧に関する研究から、レオナルドによる「スフォルツァ絵画論」の存在に関するいくつかの根拠として、ジョヴァンニ・パオロ・ロマッツォ（1538-1600）の『絵画芸術論七書』やアンブロージョ・マゼンタ神父（1565-1653）による『レオナルド・ダ・ヴィンチについての覚書』などを挙げている。

西野嘉章著、『西洋美術書誌考』、東京大学出版会、2009、pp.112-128.

45 Martin Kemp, *Leonardo on Painting*; Yale University Press, 1989.

46 Leonardo da Vinci, *Libro di Pittura, Edizione in facsimile del Codice Urbinate lat. 1270 nella Biblioteca Apostolica* Vaticana, a cura di Carlo Pedretti, Trascrizione critica di Carlo Vecce, Firenze, Giunti Gruppo Editorale 1995.

47 この引用の前には、画家によって絵画に模写された人体美が時間の経過に対してもその調和を保つという記述が見られる。その意味では、向川が「神聖比」を人体比と結びつけて考察している意図は十分にうかがえる。

48 『パリ手稿C』、紙葉26Verso

Leonardo da Vinci, *I manoscritti dell'Institut de France, Il manoscritto C*, trascrizione diplomatica e critica di Augusto Marinoni ; Japanese ed.. -- Iwanami. -- (Edizione nazionale dei manoscritti e dei disegni di Leonardo da Vinci).

49 たとえば、『アランデル手稿』には次のような記述が見られる：「水は、まさにこの不毛な大地の生命の液体にあたるものである、そして水が、枝分かれする水脈によって、重い物質がたどる自然な道筋とは反対に移動する原因こそ、あらゆる種の生物に流れる体液を動かしているものである」（紙葉236Verso）。

Leonardo da Vinci, *Il codice Arundel 263*: nella British Library edizione in facsimile nel riordinamento cronologico dei suoi fascicoli a cura di Carlo Pedretti ; trascrizioni e note critiche a cura di Carlo Vecce ; : set, tavole, testi. -- Giunti, 1998.

50 レオナルド・ダ・ヴィンチ、『風景,植物および水の習作』、レオナルド・ダ・ヴィンチ素描集：ウィンザ-城王室図書館所蔵；第1輯、岩波書店、1985年.

51 レオナルドの手稿における『ユークリッド原論』に関する記述については以下の拙稿を参照のこと。平野葉一・坂本秋奈・笛木章子：「レオナルド・ダ・ヴィンチとユークリッド『原論』—『パリ手稿』を中心に」,『中日近現代数学教育史』, 北京師範大学・内蒙古師範大学・大阪教育大学発行, 第六巻, 2007年, pp.22-38.

52 J. V. Field, *The invention of infinity*, Oxford University Press, 1997, p.1.