コーシーに現れた極限の概念について

木島文彦

I

心理的状況については、それがいつ働いたかを知ることは大変むずかしいが、それは又すべての歴史の一つの側面である。

宗教と数学とは全くかけ離れたものの様であるが、例えばコーシーがカトリック、アーベルがプロテスタント、パスカルが janséniste であったことなど、その数学のやり方から見てもそれと感ぜしめるものがある様に思うと弥永教授は言っている。[1]

コーシーは一七八九年、丁度フランス革命の起きた年にパリに生まれている。プロテスタントの立場から書かれたE・ケァンズの『基督教全史』によると、フランスのローマ・カトリック教会は一七八九年から一九一四年までの間に俗産を失い、また政治力を大いに失ったとある。またヴォルテールはローマ教会を批判し、宗教寛容への叫びをあげたとある。当時のフランスのローマ・カトリック教会に対する批判にはそれ相当の理由があった。当時のフランスのローマ・カトリック教会は多くの土地を所有しており、その土地からの収入は大部分上級聖職者の手に入った。ヴォルテールは、フランスのローマ・カトリック教会の腐敗幹部の宗教よりは、むしろ理性の宗教に味方した。[2] ローマ・カトリックの立場から書かれたヨゼフ・フービーの『カトリック思想史』の中にさえ、フランス革命の終熄した直後においては、知識階級に対するローマ・カトリック教会の将来は非常に有望らしく思えたが、しかし黄金時代は遂に来なかったし、待ち焦がれていたカトリック思想の復興も実現しなかった。[3] コーシーはこうした状況の下で、極端なカトリックで偏屈家であり、それらは数学者にとって実に似合わしからぬことであったと言われる。[4] 確かにコーシーが数学者らしくなく、カトリックの篤信者であることをアーベルも怪んでいた。[5] また彼は正統王朝派で、かつ王党員であった。[6] 数学においては実直であったヤコービが、政治上ではむしろ急進的であったのに対比して、数学では批判的であったコーシーが政治上は甚だ保守的であったことを著しい例として、学問に対する態度と実生活に対する態度との間に一見矛盾の観があることをF・クラインが問題にしている。[7] この「カトリックと王」はコーシーの生涯を縛ることになる。[8]

II

コーシーは数学の厳密化に多大の寄与をなした偉大な数学者であるが、彼にも間違いがなかったわけではなかった。『解析教程』の中で、彼は次の様な一つの定理を与えている。

「級数の異った諸項が同じ変数 x の関数であり、そしてそれが収束するところのある値の近辺で、その変数 x に関して連続である時、この級数の和 S もまたこの値の近辺で連続関数である。[9]」

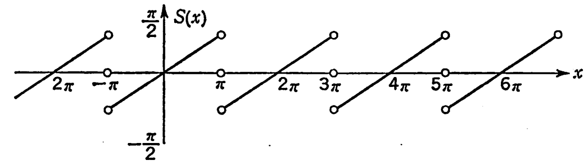
これをより身近な表現に言いかえるとしたならば、次の様になろう。

「閉区間 I で定義された関数 $f_n(x)$ を項とする関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は関数 $S(x)$ に収束するとする。各関数 $f_n(x)$ が連続ならば和 $S(x)$ もまた連続である。」……(1)

この定義を直感的に見るならば、何ら疑いのないものの様に見える。おそらくコーシー自身もいちいち例題をもって確かめはしなかったにちがいない。しかしこの問題が肯定的に答えられないような反例はいくつも見つかる。そして最初にこの定理を疑わしいとにらんだのはアーベルであった。コーシーがカトリックだったのに対してアーベルはプロテスタントであった。一八二六年にアーベルは反例として級数、

$$S(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{5}\sin 5x-\cdots$$

を考えた。この級数が x のすべての値に対して収束し、$(2m-1)\pi<x<(2m+1)\pi$ —— m は任意の整数 —— なる x に対して和は $\frac{x}{2}-m\pi$ となるから、x の値が π の奇数倍に等しいところで不連続であることがわかる。グラフにすると、



となる。また次のような反例もある。

$I=[-1,-1]$ の時、$f_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ とする。

$x=0$ の時、$f_n(0)=0$ となるから、

$$S(0)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)=0$$

$x\neq 0$ の時、$\dfrac{1}{1+x^2}<1$ となるから、

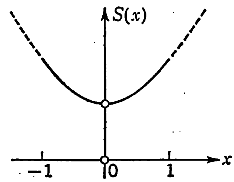
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^2\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \text{ は}$$

初項 x^2、公比 $\dfrac{1}{1+x^2}\left(0<\dfrac{1}{1+x^2}<1\right)$

の無限等比級数の和であるから、

$$S(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1+x^2$$

となる。したがって $S(x)$ は、$x=0$ で連続でない。グラフにすると、



となる。

しかし(1)は、我われが今日一様収束と呼ぶところの条件を付け加えることによって、肯定的に答える事が出来る。下記のように書き直す事が出来る。

「閉区間Iで定義された関数 $f_n(x)$ を項とする関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $S(x)$ に一様収束するとする。各関数 $f_n(x)$ が連続ならば、和 $S(x)$ もまた連続である。」

アーベルは当時一様収束という特別な言葉は使わなかったが、その概念を規定した。一様収束とは次のようなものである。

関数列 $\{f_n(x)\}$ が、区間 $[a, b]$ で関数 $f(x)$ に収束するというのは、各点 x で、n を大きくすると、$f_n(x)$ が $f(x)$ にかぎりなく接近するということである。つまり

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad (x\in[a, b])$$

である。より解析的な表現をするならば、任意の正の数 ε と x に対して、ε と x に関係してある番号 n_0 がとれて、n_0 より大きい任意の n に対し、

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

となることである。論理式で書けば、

$$(\forall\varepsilon)(\forall x)(\exists n_0)(\forall n)\{(\varepsilon>0)\wedge(n>n_0)\wedge(|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon)\}$$

となる。一般にただ収束と言えば、n_0 という番号は、ε にも x にも関係する。例えば、区間 $I=[0, 1]$ で $f_n(x)=x^n$ という関数を考えて見る。この時、$f_n(x)$ は収束して、極限（関数）は、

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0\leqq x<1)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

$0<x<1$ の時、

$$|f(x)-f(x)|=x^n<\varepsilon$$

となるためには、

$$n\log x<\log\varepsilon$$

あるいは、

$$n>\frac{\log\varepsilon}{\log x}$$

あるいは、

$$n>\frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}$$

でなくてはならない。とすると、xが1に近づくにしたがってnは限りなく大きくなる。すなわちxが1に近づくとともに、まえのn_0はいくらでも大きくとらなければならなくなるわけである。したがって、$\varepsilon>0$に対し、$[0,1]$の各点に対して共通な番号n_0をとって、$n>n_0$なる任意のnに対し$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$とすることは出来ない。一様収束というのは、いまの$n_0$が各点$x$に対して共通にとれる場合をいう。すなわち関数列$f_n(x)$が関数$f(x)$に区間$I$で一様収束するというのは、任意の$\varepsilon>0$に対し、ある$n_0$が存在して、$n>n_0$なる$n$と、$I$の各点に対し、

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

となることである。つまり

$$(\forall\varepsilon)(\exists n_0)(\forall n)\{(\varepsilon>0)\wedge(n>n_0)\wedge(|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon)\}$$

となることである。ふつうの収束といった場合は、

$$(\forall\varepsilon)(\forall x)(\exists n_0)(\forall n)\{(\varepsilon>0)\wedge(n>n_0)\wedge(|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon)\}$$

であるから、ふつうの収束と一様収束とでは、$(\forall x)(\exists n_0)$が$(\exists n_0)$となっているわけである。

このことを図形的に見ると、正の整数n_0より大きな番号nの関数f_nのグラフ

$$\{(x,y);\ a\leqq x\leqq b,\ y=f_n(x)\}$$

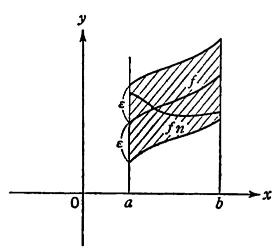
は極限（関数）fのグラフ、

$$\{(x,y);\ a\leqq x\leqq b,\ y=f(x)\}$$

のε帯状、

$$\{(x,y);\ a\leqq x\leqq b,\ f(x)-\varepsilon<y<f(x)+\varepsilon\}$$

に含まれることである。このことは次のようにも言える。関数列$\{f_n(x)\}$の各関数$f_n(x)$は、$n\to\infty$にともなって、関数$f(x)$に近接していくが、その近接度は区間$[a,b]$の点xに対して一様である。



無限なる距離に向っての収束を考える時、単なる収束と一様収束との区別の如き微細なる論点にコーシーが立ち入らなかったの[10]はごく自然の事と思われる。コーシーにとってそれは確かに微細なことであった。それゆえ彼の誤った定理に関して、あまり厳格な判断を下してはならない。オイラー等には、収束、発散の概念すらなかったのである。

III

コーシーは、現代解析学の父であり[11]、同時代人のガウス、アーベル、ガロア、ボルツァーノと共に数学における厳密性についての新しい主張の開拓者に属し[12]、確かにオイラーやラグランジュ

に比べてより高い数学的厳密さの段階に立ち[13]、その数学解析への厳密性の導入によって、一八世紀的数学との断絶を示した。[14]一八世紀以後、時代はもはや新しい酒を古い革ぶくろに、という時ではなくなってきていた。今日の我われにはわかっていることだが、微積分の形成において、その仕上げをしたのは、極限の概念である。パスカルやニュートン、あるいはその他の人々の著作の中から、極限の現代的定義に近い記述を引き出そうと思うならば、彼らの文脈の中から、そのままではどうしても厳密に表現することが出来ないような、ごたごたした部分を見つけて、そこに極限の現代的定義をおきかえるだけで十分なのである。[15]一八二一年に出版されたコーシーの教科書的著作『解析教程』[16]の中で、従来の哲学的と称して実は曖昧であった成分が掃除されて、極限の概念は決定的出発点になっており、また（今日の意味での）連続関数の概念や導関数の概念などは、その基本的な主たる性質をふくめて、そこからただちに導かれている。[17]まず極限に関する所を抜き出してみると、次のようである。

「一つの変数が次々にとる値が、一つの定った値に近づいて行き、遂にその差が任意に与えられた量よりも小さくなるならば、その定った値は、初めの変数の極限であるという。

一つの変数の次々にとる値の絶対値がどこまでも減少し、任意の与えられた数よりも小さくなるならば、その変数は無限小であるという。それは零を極限として持つ。[18]」

次に連続に関する所を抜き出してみると次のようである。

「$f(x)$を変数xの関数とし、与えられた二つの値の間にある任意のxの値に対して、この関数がつねにただ一つの有限な値をとるものとする。いまこの範囲に含まれるxの一つの値から出発して、変数xが無限に小さい量aだけ増したとすれば、関数自身も

$$f(x+a)-f(x)$$

だけ増加する。この増加量は変数xに関係するだけでなく、新しい変数aにも関係している。この時関数$f(x)$が与えられた範囲で変数xの連続関数であるというのは、この範囲に含まれる任意のxの値に対して、差

$$f(x+a)-f(a)$$

の値がaの値とともに限りなく小さくなるときである。換言すれば関数$f(x)$が与えられた範囲で連続であると言うのは、この範囲内で変数が無限小だけ増加するとき、それに対応する関数自身も、つねに無限小だけ増加することとも言う。[19]」

そして収束に関するところは次のようになっている。

「一つの定まった法則に従って無限に並ぶ一列の数

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \cdots$$

を級数といい、これらの数自身をその級数の項という。

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots u_{n-1}$$

をその最初のn項の和としよう。ただしnは任意の自然数とする。nが増大するとき、S_nがある極限Sにいくらでも近づくならば、この級数は収束するといい、Sをその級数の和と呼ぶ。

これに反して n が無限に増大するとき、S_n がいかなる一定の極限にも近づかないならば、この級数は発散するという。発散する級数は和を持たない。[20]」

コーシーのこれらの定義は、今日なお、ほとんどそのままで通用する。[21] 一九世紀は数学の厳密化の時代と言われる。コーシーをして、その最も良き代表者たらしめたのは、後の時代の人々の解釈による。アーベル、ガロアはコーシーよりも若かったし、何よりもあまりに短く生きすぎた。ボルツァーノは「荒野のさけび声」[22]であった。ガウスはその数学的厳密さ、洗練の程度においてコーシーと同等、またはそれ以上であろう。ただ一般にコーシーが、ガウスにもまして一九世紀数学の厳密化に寄与したと見られる理由は、コーシーのその発表に関しての積極性にあったと言われる。この点、発表に消極的であったガウスとは好対照である。コーシーは何かを成すと、ただちに印刷にまわした。[23] 数学の厳密化への自負はコーシーの中に強く見られる。『解析教程』の序文で彼は次のように宣言をしている。

方法としては予は数学において要求せられる厳密を期して、器械的計算から引き出される大まかな論法を用いない。[24]

高木博士は次のように言う。『解析教程』の内容は豊富で、今日代数学に属せしめられる事項をも多く含んでいる。対称式、交代式、行列式、補間法、部分分数、三次、四次の方程式の代数的解法等がそれである。しかし我われが歴史上興味を有するのは『解析教程』の解析的部分である。そこには無限小の正しい定義が高調されて、そこから極限の概念、関数の連続性の意味が整然と導かれている。無限級数の和は極限として定義せられ、収束の鑑別法がいろいろあげてある。これらは先ず実数に関して述べられてから、すべて複素数の上に拡張されている。[25]

小堀教授が注目せる所は、コーシーは、オイラー等が関数は連続であると無意識のうちに前提していたのに反して、その連続性を前提しなかったという点である。関数が連続であるか否かを決めることが問題になったことが、一九世紀の数学の解析の分野における一つの特徴であると言う。コーシー自身の述べるように、彼はそこから数学の厳密化への巨歩をふみ出した。[26]

弥永教授はコーシーの『解析教程』をオイラーの『無限解析序説』と対比してその特徴を述べる。教授は厳密化というかわりに合理化、もしくは論理化という表現を好んで使う。双方ともに種々の関数についてあつかうが、オイラーには極限や無限小に関する考察はなく、関数の連続、不連続についてもまた級数の収束、発散の概念についても何も言われていなかったところを指摘する。その事を通して、『解析教程』の内容は、『無限解析序説』と同じく代数的部分が多いが、オイラーの「器械的算法」を主とするに引きくらべて、ここでは解析の基礎を反省し、合理的に話をすすめていることに注目する。コーシーのいうところは結局ニュートン以来の思想を合理的に述べたまでであるが、解析の基礎はかかる平凡事の解明によっていたと言う。[27] 一八世紀の数学解析は主として「器械的」[28]、「技術的」方面であり合理的、論理的方面は閑

却されており、したがってオイラー等が無意識に、「器械的」に計算して得られた結果の正しかった理由を、合理的、論理的に解明したことが、一九世紀数学の特筆すべきことであった。[29]

これはブルバキのコーシーに対する評価——古代ないし一七世紀前半の健全な伝統への立ち帰り[30]——と通じる。また「ε－δ論法」を「無限の回避」という西欧的ギリシャ風な表現と考え、[31]それにならって作られたと考えるとそれは連環を遠い所まで持つことになる。

ジュディス・グラビナーは一八世紀数学から一九世紀数学への移り変わりを掘り下げる。一九世紀に行なわれた数学の厳密化をもって「一九世紀革命」と呼ぶ。そしてその革命の本当の意味を見つけようとする。コーシーがその革命の主人公であったことには間違いがないとしながらも、その演じた役割を正確に伝えることによって、コーシーの一九世紀数学の厳密化に対する影響力の真の姿がどういうものであったかを伝えようとする。グラビナーはコーシーの仕事は一八世紀数学の再解釈、再形成であるとしているが、いかなる偉大な仕事も無からは生ぜず、また一九世紀数学が一八世紀数学に大いに負うているとしても、自然にそして自動的に移り行くものでなかった以上、コーシーが一九世紀数学解析の厳密化における最も重要な人物であるとしている。[32]真の新しさは、利那的にあらわれるものでなく、長い積み重ねの後にあらわれるものであるとするのは当然のことである。

数学解析において、一八世紀と一九世紀の決定的相違はその厳密性においてである。一八世紀において厳密化の行なわれなかった理由は、確かな定義をし、それを用いて定理を作り出すということが、大変困難な仕事であったということだけでなく、主なる理由の一つに数学一般の興味の対象が、純粋に数学の基礎について考えることよりもむしろその応用、つまり数理物理にあったからである。言葉を変えて言うならば、一八世紀においては、数学解析に厳密を期すよりもむしろ与えられた式を解く方法を見つけることの方が重要なことであった。[33]一八世紀の数学者と呼ばれる人たち、ベルヌーイ兄弟、ダランベール、オイラー、ラプラス、ラグランジュのうち、ただラグランジュのみが、数学解析の基礎に特別な関心を示したが、[34]他のものはギリシャ以来の伝統的幾何学から抜けられなかった。ニュートンとライプニッツの微積分に関する論争は、数学解析の基礎をかためることに貢献したが、ニュートンの流率、そしてライプニッツの無限小の概念の中ではいまだ極限というものは一つの量として定義されていた。[35]

ラグランジュは一七九七年に『解析関数』をあらわし、その内容の代数的取扱いによって、それまでの数学に対した最初の人となった。彼はその中でニュートンの流率は、数学的量をあたかも動きから生じたもののように考えていて受け入れがたい、またライプニッツの無限小は誤差の打消し合いによってのみ正しい結果が得られるので、それはとても厳密とは言えないと言っている。[36]ラグランジュはその著作を通して新しい結果を引き出すよりもむしろ数学的厳密性を追求することによって、コーシーそしてボル

ツァーノの先駆者となった。

代数解析（analyse algébrique）という言葉はコーシーも使用するが、元来ラグランジュのものである。ラグランジュの意味するところは、代数的方法と解析の基礎概念の結合ということであった。彼は無限級数の考察を通じて技術的によりよい解を見つけることよりもむしろなぜそうなるかについて、数学的に厳密な説明を行うことの方に関心を示した。コーシーがラグランジュから技術的なことを学んだということは疑いがない。コーシーはまたラクロアの本をずいぶん参考にしたと言われるが、それは混乱の中から金を見つけるのに似ていた。[37]

グラビナーは、極限、連続、収束の概念の成立過程を見直す。

一八世紀の初頭にニュートンは極限の概念を持っていたが、それは彼にとって究極的な比であり、究極的な速度であり、究極的に到達するであろう境界であった。そして彼にとってそれはあくまで直感的幾何学的な問題であった。ダランベール、オイラー、ラグランジュは極限の概念を物理的要素から解放するために、動きというものが入らない代数的表現を試みた。コーシーは、彼らが行った代数化に、より一層の厳密性をつけ加えた。コーシーはニュートンのように、実際に比が究極的に極限に等しくなるかどうかという問題について考えることもなかったし、またダランベールのように、割線が接線になるというようなことも言わなかった。[38] 彼はどこで表現を止めるべきかを知っていた。彼は変数と極限の差をのぞみうるいかなる量よりも小さく出来る、またもし存在するなら極限はある値を持つと言っただけであり、実際に極限が存在するとかしないとかの論議には立ち入らないのである。[39]

一八世紀には、中間値の性質が見い出される時も、微分可能である時も、飛び越しがない（no jump）時も、また知覚出来ない変化が与えられた時も、皆等しく連続という言葉の下にかたづけられていた。[40] コーシーは先に引用したように連続関数の定義を一つは代数的に、もう一つは無限小の概念を用いて厳密に定義した。[41]

収束の概念は、数学解析の中では、極限の概念ほど基本的なものではなかったが、それはコーシーの不等関係を基礎とした極限概念のもっとも詳細な応用であった。彼は『解析教程』の中で、単に級数の和を定義するだけには止まらなかった。彼は全てのコーシー列は収束するというコーシー判定条件と呼ばれる収束条件を示す。ただこのコーシー判定条件については、コーシーが発表する以前にボルツァーノがはっきりと全く同様の条件を述べていることから、コーシーのボルツァーノに対する依存をもっとも強く言われる点である。グラビナーはここにおいてはそれはむしろ、オイラーの調和級数の発散に関する判定条件を一般化することで導かれたのではないかといっている。[42]

おわり。

註

（1） 弥永昌吉、『純粋数学の世界』弘文堂、1942, p. 141.

（2） E・ケァンズ、『基督教全史』聖書図書刊行会、1957,

pp. 520—521.

(3) ヨゼフ・フービー、『カトリック思想史』中央出版、1927, pp. 318—320.

(4) コワレフスキー、『数学史』八元社、1941, p. 343.

(5) 高木貞治、『近世数学史談』河出書房、1942, p. 92.

(6) ストルイク、『数学の歴史』みすず、1957, p. 157.

(7) 高木貞治、『近世数学史談』p. 92.

(8) 森毅、『異説数学者列伝』蒼樹書房、1973, p. 141.

(9) A. L. Cauchy, 『Cours d'analyse l'Ecole Polytechnique (1821), Oeuvres (2), Ⅲ』p. 120.

「Lorsque les differents terms de la sèrie sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la sèrie est convergente, la somme S de la sèrie est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continne de x.」

(10) 弥永昌吉、『現代数学の基礎概念（上）』弘文堂、1944, p. 103.

(11) 武隈良一、『数学史』培風館、1959, p. 186.

(12) ストルイク、『数学の歴史』p. 155.

(13) コワレフスキー、『数学史』p. 348.

(14) E・T・ベル、『数学を作った人々（上）』東京図書、1976, p. 285. Carl B.B oyer, 『A History of Mathematics』John Willy & Sons, 1968, p. 562.

(15) ブルバキ、『数学史』東京図書、1970, p. 203.

(16) 高木貞治、『近世数学史談』p. 90.

(17) ブルバキ、『数学史』p. 233.

(18) A. L. Cauchy, 『Oeuvres (2), Ⅲ』p. 19.

「Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite.

Une variable de cette espèce a zévo pour limite.」

(19) 同、p. 43.

「Soit $f(x)$ une fonction de la variable x et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit a, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+a)-f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable a et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la difference

$$f(x+a)-f(x)$$

décroit indéfiniment avec celle de a. En d'autres terms, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.」

(20) 同、p. 114.

「On appelle série une suite indéfinie de quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots u_{n-1}$$

la somme des n premiers terms, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme S_n S'approche indéfiniment d'une certaine limite S, la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera la somme de la série. Au contraire, si, tandis que n croit indéfiniment, la somme S_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente et n'aura plus de somme.」

(21) 変数を「変化する量」と考えることを止め、今日 ε, δ 概念で極限を定義する。北村泰一編、『極限と微分・積分』槇書店、を参照。

(22) Carl B. Boyer,『A History of Mathematics』p. 565.

(23) 同、p. 562.

(24) A. L. Cauchy,『Oeuvres (2), III』p. ij.

(25) 髙木貞治、『近世数学史談』pp. 89—91.

(26) 小堀憲、『数学史鈔』秋田屋、1946, pp. 146—148.

(27) 弥永昌吉、『現代数学の基礎概念(上)』pp. 89—91.

(28) 弥永昌吉、『純粋数学の世界』pp. 4—9.

一九三五年一二月に文部省において行なわれた田辺元による『思想史的に見たる数学の発達』という題目の講演の中で、彼はギリシャ数学をスタチカル、近世の数学をメカニカル、現代の数学をダイナミカルであると言及している。

(29) 同、pp. 8—9.

(30) ブルバキ、『数学史』p. 233.

(31) 中村幸四郎、『数学史』共立全書、1981, p. 210.

彼は数学の厳密化を単に代数化、また動きを取り除くことは見ない。極限の概念の統一、またその概念がはたすであろう数学的重要性の見通しを問題にして、ダランベールに極限概念の形成的、歴史的観点からの数学史的評価を与える。

(32) Judith V. Grabinar, The『Origins of Canchy's Rigorous Colculus』The MiT Press, 1981, Preface and p. 2

(33) 同、p. 18.

(34) 同、p. 17.

(35) 同、p. 33.

(36) 同、pp. 43—46.

(37) 同、p. 80.
(38) 同、p. 86.
(39) 同、p. 86.
(40) 同、p. 83.
(41) 同、p. 87.
(42) 同、p. 104.